

AJUSTAMENTO DE ALTITUDES USANDO OBSERVAÇÕES DE ÂNGULOS ZENITAIS COM LEITURAS RECÍPROCAS E SIMULTÂNEAS

Adjustment of altitudes by using observations of zenith angle with reciprocal and simultaneous readings

CLAUDIONOR RIBEIRO DA SILVA⁽¹⁾

ANTÔNIO SIMÕES SILVA⁽²⁾

⁽¹⁾Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências da Terra, Departamento de Geomática

Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba – PR

crs@ufpr.br

⁽²⁾Universidade Federal De Viçosa

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Departamento de Engenharia Civil

Curso de Engenharia de Agrimensura, Viçosa – MG

asimoes@ufv.br

RESUMO

Ciente da importância do ajustamento de observações para a realização de trabalhos topográficos e geodésicos realizou-se, neste trabalho, o ajustamento de ângulos zenitais com leituras recíprocas e simultâneas, visando encontrar valores estimados para as altitudes dos marcos estudados. Este trabalho foi realizado numa poligonal pertencente à Rede Planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) de primeira ordem. Todos os marcos dessa poligonal estão situados no campus da Universidade Federal de Viçosa. O método de ajustamento utilizado foi o método dos mínimos quadrados (MMQ). O modelo usado foi o paramétrico. Os resultados obtidos indicaram o procedimento utilizado nesse estudo como satisfatório.

Palavras chave: ajustamento de observações, ângulo zenital, modelo paramétrico.

ABSTRACT

Knowing the importance of the adjustment of observations for the topographical and geodesic works, in this paper, the adjustment of zenithal angles with reciprocal and simultaneous readings was used, seeking for estimated values for the altitudes of the a set of marks. This work was accomplished in a polygonal belonging to the Planimetric Network of the Brazilian Geodesic System (SGB) of first order. All the

marks of that polygonal are placed at the campus of the Federal University of Viçosa. The adjustment was performed by the Least Square Method. The parametric model was applied, and the obtained results indicated that the procedure used was satisfactory.

Keywords: adjustment, zenithal angle, parametric model

1. INTRODUÇÃO

Atualmente é notável a importância do ajustamento de observações nos campos da Topografia, Geodésia e em outros ramos da Agrimensura.

O ajustamento de observações é um ramo da Matemática Aplicada que, apoiada à Estatística, objetiva estimar valores únicos e mais prováveis para um conjunto de observações (GEMAEL, 1994). Na medição essas observações são coletadas e estão sujeitas a erros grosseiros, sistemáticos e acidentais. Os erros grosseiros e sistemáticos são eventualmente detectados por meio de técnicas ou métodos como o de Barda. Todavia os erros acidentais ou aleatórios não podem ser detectados. Devido à incapacidade de avaliar os erros acidentais, usa-se o ajustamento de observações para encontrar um valor estatisticamente representativo do valor real da observação, como afirma GEMAEL (1994). As observações são relacionadas com os parâmetros por meio de modelos matemáticos devidamente escolhidos.

A relação entre parâmetros (altitudes) e observações (ângulos zenitais) deve existir de modo que os ângulos zenitais possam ser ajustados pelo modelo paramétrico do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Este modelo é utilizado para estimar valores que se encontram vinculados às observações (GEMAEL, 1994).

O método de ajustamento de observações utilizado por SILVA (2002a), para estimar os valores dos parâmetros, emprega um modelo matemático com observações indiretas. Isto é, ajusta as diferenças de nível e não os ângulos zenitais, que são as verdadeiras observações.

Nesse trabalho foi utilizado um modelo matemático diferente daquele recomendado por SILVA (2002a), isto é, trata-se de um modelo matemático que busca ajustar os ângulos zenitais.

Para fins de comparação realizou-se o ajustamento pelos dois métodos. Em ambos os métodos de ajustamento foram tomados como injeções todos os valores das alturas dos instrumentos, das distâncias inclinadas e da altitude ortométrica da Estação de Tratamento de Água (ETA).

A significativa importância do assunto pesquisado, ajustamento de observações, para o Engenheiro Agrimensor e outros profissionais, tendo em vista que o ajustamento possibilita a determinação do valor mais provável, para uma certa variável, dentro de um conjunto de dados redundantes; e ainda, a vantagem do nivelamento trigonométrico ao permitir medidas de distâncias mais longas que o nivelamento geométrico foram a razão motivadora na realização desse trabalho.

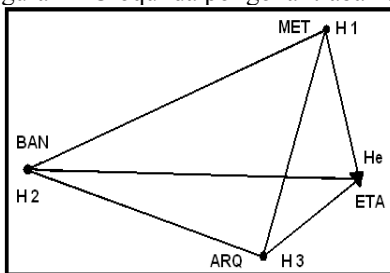
2. OBJETIVO

Objetivou-se nesse trabalho ajustar as altitudes dos pontos (marcos) estudados. Para tanto foram utilizados ângulos zenitais com leituras recíprocas e simultâneas. Modelos matemáticos foram elaborados relacionando, de forma direta, ângulos zenitais e altitudes.

3. MATERIAL E MÉTODOS

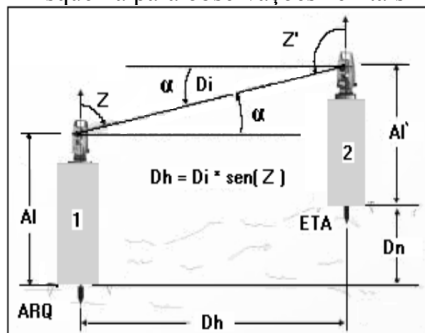
Realizou-se este trabalho numa poligonal pertencente à Rede Planimétrica do SGB, de primeira ordem. OS pontos da poligonal são materializados por marcos construídos com bases fixas (de concreto), delimitados com um cilindro (tubo). Essa poligonal está situada no campus Universidade Federal de Viçosa. A Figura 1 ilustra uma geometria hipotética dessa poligonal.

Figura 1 - Croqui da poligonal trabalhada



Nas observações de distâncias inclinadas utilizou-se um taquímetro eletrônico (TopCon 212). Todavia, nas observações dos ângulos zenitais foram utilizados dois teodolitos Wild T2. O procedimento utilizado na observação dos ângulos zenitais foi o método das leituras zenitais recíprocas e simultâneas. Portanto, nas observações realizadas foram coletados os ângulos zenitais, as alturas dos instrumentos (alturas das bases do marco e do instrumento) e distâncias inclinadas, em cada marco, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 - Esquema para observações zenitais recíprocas



Fonte: Maia, (1999) com modificações pelo autor.

Na Figura 2, Z é o ângulo zenital, Z' é o ângulo recíproco de Z , D_i é a distância inclinada, D_h é a distância horizontal, α é o ângulo vertical, A_i é a altura do equipamento na estação 1 (ARQ), A_i' é a altura do equipamento na estação 2 (ETA), D_n é a diferença de nível entre 1 e 2.

As visadas simultâneas foram executadas em três séries de medidas diretas e inversas. As leituras dos ângulos zenitais (Z e Z'), foram realizadas do seguinte modo: coincidindo o fio médio estadimétrico do instrumento 1 com o centro óptico do instrumento 2, leu-se os ângulos PD e PI no instrumento 1 (ângulos lidos em cada série para o cálculo posterior de Z) e os ângulos PD e PI no instrumento-2 (ângulos lidos em cada série para o cálculo posterior de Z'). Este procedimento está representado na Figura 2.

Após as observações destes ângulos (PD e PI) calculou-se a média das leituras direta e inversa de cada série. Finalmente obteve-se os ângulos Z e Z' a partir das respectivas médias da três séries computadas em cada estação.

A soma dos ângulos Z e Z' deveria ser igual a 180° , a diferença existente entre estes valores é a soma dos erros de observação, juntamente com o efeito da refração e esfericidade. No caso da poligonal em questão, o efeito da refração e o erro de esfericidade, por se tratar de medidas de ângulos zenitais com leituras recíprocas e de pequenas distâncias, podem ser desprezíveis, como afirmam SILVA (2002b) e LOCH; CORDINI (2000). Esses autores mostram como calcular estes erros para os casos em não se deve desprezá-los. Assim, após confirmação da existência e dimensão de tais erros realizou-se o ajustamento desses ângulos.

No desenvolvimento do ajustamento, num primeiro momento, preocupou-se com a escolha de um modelo matemático mais adequado.

Com os ângulos zenitais Z_i e Z_i' escreve-se a altitude H_i na forma:

$$H_i = H_e + Dh_i \cot \left(\frac{180^\circ - Z_i' + Z_i}{2} \right) + Al_e - Al_i$$

assim,

$$H_i = H_e + Dh_i \cot \left(90^\circ - \frac{Z_i' - Z_i}{2} \right) + Al_e - Al_i$$

finalmente,

$$H_i = H_e + Dh_i \tan \left(\frac{Z_i' - Z_i}{2} \right) + Al_e - Al_i \quad (1)$$

Com o ângulo zenital Z_i , H_i é escrita na forma:

$$H_i = H_e + \frac{Dh_i}{\tan(Z_i)} + Al_e - Al_i \quad (2)$$

onde Dh_i é a distância horizontal entre dois marcos considerados, Z_i é o ângulo zenital, Z_i' é o ângulo recíproco de Z , Al_e é a altura da base no marco ETA, somada à altura do instrumento (teodolito), Al_i são as alturas das bases nos marcos, somadas às alturas dos instrumentos (teodolito), H_e é a altitude do marco na estação (ETA), H_i são as altitudes dos demais marcos da poligonal estudada.

A partir da equação 2, escreve-se o ângulo zenital Z_i :

$$Z_i = \arctan \left(\frac{Dh_i}{H_i - H_e - Al_e + Al_i} \right) \quad (3)$$

Por meio das equações 1 e 3, exprime-se o ângulo zenital Z_i' como:

$$Z_i' = \arctan \left(\frac{Dh_i}{H_i - H_e - Al_e + Al_i} \right) + 2 \arctan \left(\frac{H_i - H_e - Al_e + Al_i}{Dh_i} \right) \quad (4)$$

onde, os ângulos Z_i , Z_i' são as observações e as H_i são os parâmetros.

Analisando a Figura 1 (respeitando as direções consideradas), percebe-se que: $Dn_4 = H_2 - H_3$, $Dn_5 = H_1 - H_3$ e $Dn_6 = H_1 - H_2$.

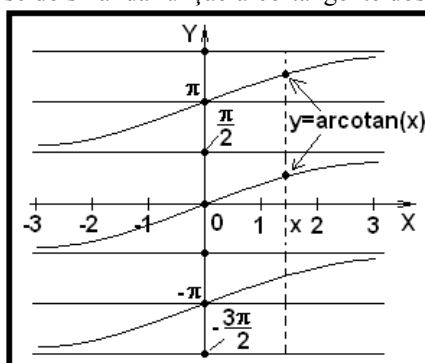
Portanto, as equações para cada uma das observações, ficarão, como mostrado a seguir, no início do ajustamento. Assim os parâmetros são H_1 , H_2 e H_3 . Onde, H_1 (MET) é a altitude ortométrica do marco localizado na Meteorologia, H_2 (BAN) é a altitude ortométrica do marco localizado nas Bandeiras e H_3 (ARQ) é a altitude ortométrica do marco localizado nas proximidades do Departamento de Arquitetura.

Analisando os ângulos zenitais observados e aplicando os modelos matemáticos escolhidos, notou-se que no cálculo das observações aproximadas, L_0

$= F(X_0)$ (vetor mostrado a seguir), a necessidade de fazer um estudo dos sinais resultantes, devido à presença da função arcotangente, inserida nos referidos modelos.

Da definição da função arcotangente, sabe-se que se os argumentos forem negativos, os arcos pertencem ao segundo e quarto quadrantes. Isto vale para arcos de ângulos negativos nesses quadrantes. Assim, para a obtenção dos ângulos Z'_3 , Z'_6 , Z_3 e Z_6 positivos, torna-se necessário somar 180° ao valor obtido no cálculo desses ângulos, visto que esses ângulos pertencem ao intervalo $0^\circ \leq Z \leq 180^\circ$. Para o caso de arcos pertencentes ao primeiro quadrante, ou seja, com diferenças de nível positivas, a função arco-tangente retornará o valor do ângulo zenital diretamente, sem a necessidade de avaliar sinal. A Figura 3 mostra com mais clareza os dois casos.

Figura 3 - Análise do sinal da função arco-tangente dos ângulos zenitais



Finalizando a etapa anterior, ou seja, realizadas as observações de ângulos zenitais, passou-se então à fase do ajustamento propriamente dito. Nesta nova etapa do trabalho procurou-se analisar e interpretar os resultados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

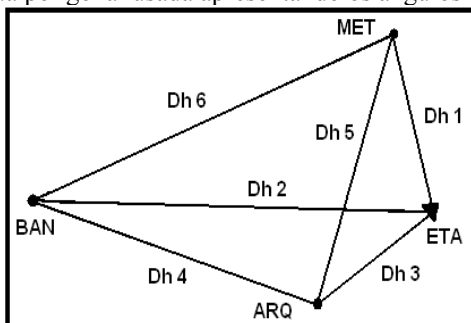
De posse das observações efetuadas em campo e apresentada na Tabela 1, seguiu-se uma seqüência de passos visando facilitar o processo do ajustamento das observações. Essa série de passos pode ser vista em DALMOLIN, (2004).

Tabela 1 - Observações

	G	M	S	DISTÂNCIA(m)	ALT. – ETA (m)
$Z_1 =$	89	32	9,6	$Dh_1 = 432,569$	698,410
$Z'_1 =$	90	32	4,5	$Dh_2 = 1082,146$	
$Z_2 =$	89	16	26,5	$Dh_3 = 384,693$	
$Z'_2 =$	90	45	48,7	$Dh_4 = 845,193$	
$Z_3 =$	95	33	51,1	$Dh_5 = 673,108$	
$Z'_3 =$	84	30	19,9	$Dh_6 = 1051,033$	
$Z_4 =$	86	29	2,9		
$Z'_4 =$	93	34	29		
$Z_5 =$	86	29	34,4		
$Z'_5 =$	93	31	49,3		
$Z_6 =$	90	36	30,7		
$Z'_6 =$	89	25	50,7		

Para uma melhor visualização da distribuição das distâncias horizontais elaborou-se um croqui da poligonal estudada, como ilustra a Figura 4.

Figura 4 - Croqui da poligonal usada apresentando os ângulos e distancias medidas



A seguir procurou-se mostrar e explicar cada etapa do ajustamento, e a respectiva importância de cada uma, para atingir o objetivo do trabalho.

Após estudado o problema, como explicado anteriormente, chegou-se a conclusão de que as melhores equações ($L_a = f(X_a)$) ou $Z_i = f(H_k)$ para $i = 1...6$ e $k = 1...3$), para cada uma das observações, seriam as equações mostradas a seguir:

$$Z_i = \arctan\left(\frac{Dh_i}{H_k - H_e - Al_e + Al_k}\right) \quad (6)$$

$$Z'_i = \arctan\left(\frac{Dh_i}{H_k - H_e - Al_e + Al_k}\right) + 2 \arctan\left(\frac{H_k - H_e - Al_e + Al_k}{Dh_i}\right) \quad (7)$$

Diante das equações obtidas anteriormente, isolou-se os parâmetros em função das observações e atribuindo-lhes os valores observados, obteve-se os valores aproximados dos parâmetros (X_0).

$$H_1 = H_e + Dh_1 \tan\left(\frac{Z'_1 - Z_1}{2}\right) + Al_e - Al_1 \quad (8)$$

$$H_2 = H_e + Dh_2 \tan\left(\frac{Z'_2 - Z_2}{2}\right) + Al_e - Al_2 \quad (9)$$

$$H_3 = H_e + Dh_3 \tan\left(\frac{Z'_3 - Z_3}{2}\right) + Al_e - Al_3 \quad (10)$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \\ H_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 702,020 \\ 712,407 \\ 661,229 \end{bmatrix} (m) \quad (11)$$

A seguir apresentou-se a matriz dos pesos. Essa matriz é composta de valores que indicam as precisões dos equipamentos utilizados. Como os valores das precisões são desconhecidos, usou-se a matriz identidade ($P = I_{12}$), ou seja, desconsiderou os pesos no primeiro momento (posteriormente recorreu-se a esta matriz para avaliar os resultados obtidos).

Posteriormente, preocupou-se em encontrar os valores aproximados das observações, utilizando as equações 6, 7, 8,...,17, os quais são reunidos no vetor L_0 :

$$L_0 = f(X_0) = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z'_1 \\ Z_2 \\ Z'_2 \\ Z_3 \\ Z'_3 \\ Z_4 \\ Z'_4 \\ Z_5 \\ Z'_5 \\ Z_6 \\ Z'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,56208204 \\ 1,57951061 \\ 1,55779799 \\ 1,58379467 \\ 1,66730140 \\ 1,47429125 \\ 1,51016578 \\ 1,63142688 \\ 1,50994502 \\ 1,63164763 \\ 1,58059330 \\ 1,56099936 \end{bmatrix} (rad) \quad (12)$$

De posse dos vetores L_0 e L_b , calculou-se o vetor L . Para tanto processou-se a diferença entre o vetor L_0 e o vetor L_b (vetor dos valores observados), como segue:

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} 6,16E-04 \\ 6,16E-04 \\ 3,28E-04 \\ 3,28E-04 \\ 6,08E-04 \\ 6,08E-04 \\ -7,33E-04 \\ 1,76E-03 \\ -3,59E-04 \\ 7,65E-04 \\ 8,24E-04 \\ -1,38E-04 \end{bmatrix} (rad) \quad (13)$$

Seguidamente determinou-se a matriz A. Essa matriz é formada pelas derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial Z_i}{\partial H_1}$ das equações de observação Z_i em relação aos parâmetros ajustados H_i , sendo avaliadas com X_0 . Essa matriz apresenta a forma:

$${}_n A_m = \left[\frac{\partial Z}{\partial x_a} \right]_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial H_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial H_2} & \cdots & \frac{\partial Z_1}{\partial H_m} \\ \frac{\partial Z_1'}{\partial H_1} & \frac{\partial Z_1'}{\partial H_2} & \cdots & \frac{\partial Z_1'}{\partial H_m} \\ \frac{\partial Z_n}{\partial H_1} & \frac{\partial Z_n}{\partial H_2} & \cdots & \frac{\partial Z_n}{\partial H_m} \\ \frac{\partial Z_n'}{\partial H_1} & \frac{\partial Z_n'}{\partial H_2} & \cdots & \frac{\partial Z_n'}{\partial H_m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Avaliando com X_0 as derivadas parciais de primeira ordem, obtém a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0023 & 0 & 0 \\ 0,0023 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0009 & 0 \\ 0 & 0,0009 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0026 \\ 0 & 0 & 0,0026 \\ 0 & -0,0012 & -0,0012 \\ 0 & 0,0012 & 0,0012 \\ -0,0015 & 0 & -0,0015 \\ 0,0015 & 0 & 0,0015 \\ -0,0010 & -0,0010 & 0 \\ 0,0010 & 0,0010 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{rad}{m} \right) \quad (15)$$

Convém ressaltar que as grandezas mensuradas, como exemplo aqueles apresentados na matriz A , foram representadas, por conveniência (ilustrativa), com casas decimais menores que as utilizadas no processo de cálculos envolvidos ao longo de todo trabalho.

De posse da matriz A , encontrou-se o vetor das correções (X), que convertem os parâmetros aproximados (X_o) em parâmetros ajustados (X_a). Onde, $X = -(A'PA)^{-1}(A'PL)$ e $X_a = X_o + X$.

$$A = \begin{bmatrix} -00020002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0002 & 0002 & -0001 & 0001 \\ 0 & 0 & -00010001 & 0 & 0 & -0001 & 0001 & 0 & 0 & 0001 & -0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -00030003 & 0001 & -0001 & 0002 & -0005 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A'PA = \begin{bmatrix} 1,7E-05 & -1,8E-06 & -4,4E-06 \\ -1,8E-06 & 6,3E-06 & -2,8E-06 \\ -4,4E-06 & -2,8E-06 & 2,0E-05 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$A'PL = \begin{bmatrix} 7,5E-07 \\ 3,9E-06 \\ -4,6E-06 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$X = -(A'PA)^{-1}(A'PL) = \begin{bmatrix} 0,072 \\ 0,575 \\ -0,132 \end{bmatrix} (m) \quad (19)$$

onde, A' é a matriz A transposta; $A'PA$ é a multiplicação matriz (A) transposta pela matriz dos pesos (P); $A'PL$ é a multiplicação matriz (A) transposta pela matriz dos pesos (P) e posteriormente multiplicado esse produto pelo vetor $L = L_o - L_b$.

Após encontrado o vetor das correções (X), calculou-se o vetor dos parâmetros ajustados (X_a), somando ao vetor dos parâmetros aproximados o vetor das correções:

$$X_a = X_o + X = \begin{bmatrix} 702,091 \\ 712,981 \\ 661,098 \end{bmatrix} (m) \quad (20)$$

Encontrou-se neste passo o vetor dos resíduos (V):

$$V = AX + L = \begin{bmatrix} -0,00078 \\ -0,00045 \\ -0,00086 \\ -0,00020 \\ -0,00027 \\ -0,00095 \\ -0,00010 \\ -0,00093 \\ -0,00006 \\ -0,00046 \\ -0,00035 \\ -0,00034 \end{bmatrix} (rad) \quad (21)$$

Antes do cálculo do vetor das observações ajustadas calculou-se a variância da unidade de peso a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V'PV}{n-m} = \left(\frac{3,9E-06}{12-3} \right) = 4,3E-07 \quad (22)$$

onde, n é o número de observações igual a 12; m é o número de parâmetros igual a 3 e V' é o vetor transposto dos resíduos.

Para verificar se o valor encontrado difere da unidade (um) realizou-se o teste de hipótese Qui-Quadrado (χ^2) da seguinte maneira:

a) enunciação das hipóteses básica H_0 e alternativa H_a . $H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ e $H_a: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$.

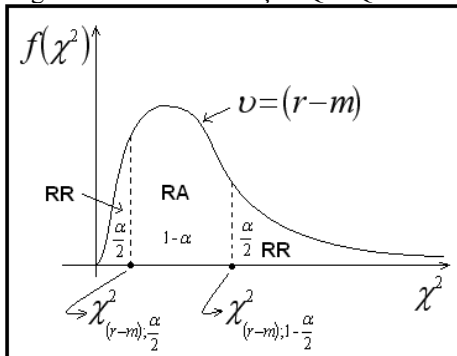
b) estatística do teste. $\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (r-m) \sim \chi^2(r-m)$, como $\sigma_0^2 = 1$, então $\chi^{*2} = \hat{\sigma}_0^2 (r-m) = 3,87E-06$.

c) fixação do nível de significância (α) igual a 95%.

d) teste da hipótese H_0 . RA: região de aceitação de H_0 ; RR: região de rejeição de H_0 .

A Figura 5 apresenta as regiões de aceitação e rejeição de H_0 .

Figura 5 - Curva da função Qui-Quadrado



Como $n=12$ e $m=3$, logo o grau de liberdade $r=v=9$. Com esses parâmetros encontrou-se na tabela do Qui-Quadrado, para um valor de 95% de confiança, o intervalo com os seguintes limites: $2,70 \leq \chi^2 \leq 19,02$. Assim pode-se verificar que o valor de $\hat{\sigma}_0^2$ encontrado é diferente da unidade (um).

A diferença (erro) de $\hat{\sigma}_0^2$ da unidade pode ser atribuída à matriz dos pesos (como o valor encontrado é menor que um, logo a ponderação foi subestimada) ou à erros de cálculos. Para verificação da subestimação da matriz dos pesos realizou-se o seguinte procedimento: multiplicou-se a matriz dos pesos (identidade), estipulada inicialmente, pelo inverso da variância da unidade de peso a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Seguidamente, repetiu-se todos os outros passos seqüentes, encontrando, desta forma, o segundo sigma zero a posteriori igual à unidade (um). Se o novo valor calculado para $\hat{\sigma}_0^2$ fosse diferente da unidade poderia afirmar-se que ocorreu erros no processo de cálculo.

A explicação analítica do exposto acima pode ser verificada como segue: $P = \sigma_0^2 \sum_{Lb}^{-1}$ onde, P é a matriz dos pesos inicial. Depois da multiplicação pelo inverso de $\hat{\sigma}_0^2$, a expressão para o peso foi: $P = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sum_{Lb}^{-1}$, onde, \sum_{Lb}^{-1} é a matriz

variância-covariância das observações. O resultado obtido dessa operação foi $P = 2,3E06I$, onde, I é a matriz identidade (atribuída como peso a priori).

Após repetidos todos os passos subseqüentes chegou-se ao novo valor da variância da unidade de peso a posteriori igual a unidade, como mostrado abaixo. Isso confirma a hipótese de que o erro está realmente na ponderação.

$$V'PV = 9, \text{ e, portanto, } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{V'PV}{n-m} = 1.$$

Observou-se que o vetor X , calculado anteriormente, tinha valores altos em relação a zero (o vetor X tende a zero). Para melhorar estes resultados considerou como repetição quatro casas decimais, isto é, o valor de 0,0001, e realizou-se iterações. Este procedimento de iterações foi realizado do seguinte modo: Considerou-se o Vetor dos parâmetros ajustados (X_a) do primeiro processo do ajustamento, igual ao vetor dos parâmetros aproximados (X_o), e posteriormente, realizou todos os cálculos dos passos subseqüentes até que se encontrou o novo (X_a). Para o caso particular deste trabalho a convergência ocorreu na primeira iteração, mas para outros casos o procedimento acima deve ser repetido até que o valor do vetor (X) convirja para a tolerância desejada.

Os valores encontrados para (X) após a iteração foram:

$$X = -(A'PA)^{-1}(A'PL) = \begin{bmatrix} -0,000003 \\ -0,000001 \\ -0,000009 \end{bmatrix} (m) \quad (23)$$

Conseqüentemente, o vetor (X_a) encontrado foi:

$$X_a = X_o + X = \begin{bmatrix} 702,091 \\ 712,981 \\ 661,098 \end{bmatrix} (m) \quad (24)$$

Cabe ressaltar que se a variância da unidade de peso a posteriori estivesse atendido a condição de igualdade à unidade no primeiro desenvolvimento do ajustamento, ou se provado estatisticamente essa igualdade, não haveria necessidade de recalculer a matriz dos pesos nem os outros passos. Necessário seria calcular apenas os passos que serão seguidos agora.

Finalmente, encontram-se as observações ajustadas (L_a), como mostrado a seguir:

$$L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} 1,5619161 \\ 1,5796765 \\ 1,5572671 \\ 1,5843255 \\ 1,6676408 \\ 1,4739519 \\ 1,5093331 \\ 1,6322595 \\ 1,5096437 \\ 1,6319489 \\ 1,5810716 \\ 1,5605210 \end{bmatrix} (rad) \quad (25)$$

Observou-se que os valores contidos no vetor das observações ajustadas (L_a), são de valores iguais aos fornecidos pelo vetor dos parâmetros ajustados (X_a), quando manipulados pelo modelo matemático (1).

As Tabelas 2 e 3 apresentam os resultados obtidos. Analisando-as, percebeu-se que as condições aplicadas pelos modelos matemáticos ao ajustamento foram satisfeitas.

Tabela 2 - Observações e parâmetros ajustados e as respectivas precisões dos parâmetros

Observações Ajustadas:			Parâmetros Ajustados (m)	Desvio Padrão
G	m	s		
89	29	28,33	H1 = 702,091	0,170
90	30	1,00	H2 = 712,981	0,279
89	13	29,41	H3 = 661,098	0,157
90	46	30,59		
95	32	55,61		
84	27	4,39		
86	28	42,31		
93	31	17,69		
86	29	46,37		
93	30	13,63		
90	35	19,43		
89	24	40,57		

Tabela 3 - Verificação do resultado do ajustamento

$H_1 = H_e + \frac{Dh_1}{\tan(Z_1)} + Al_e - Al_1 =$	702,091 m
$H_2 = H_e + \frac{Dh_2}{\tan(Z_2)} + Al_e - Al_2 =$	712,981 m
$H_3 = H_e + \frac{Dh_3}{\tan(Z_3)} + Al_e - Al_3 =$	661,098 m
$H_1 = H_3 + \frac{Dh_5}{\tan(Z_5)} + Al_3 - Al_1 =$	702,091 m
$H_2 = H_1 - \frac{Dh_6}{\tan(Z_6)} + Al_1 - Al_2 =$	712,981 m
$H_3 = H_2 - \frac{Dh_4}{\tan(Z_4)} + Al_2 - Al_3 =$	661,098 m
$Z'_1 + Z_1 =$	180°
$Z'_2 + Z_2 =$	180°
$Z'_3 + Z_3 =$	180°
$Z'_4 + Z_4 =$	180°
$Z'_5 + Z_5 =$	180°
$Z'_6 + Z_6 =$	180°

A estimação da qualidade dos parâmetros (X) pode ser verificada, a seguir, por meio da matriz de covariância $\Sigma_x = \hat{\sigma}_0^2 (A'PA)^{-1}$.

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} 1,25E-08 & 5,07E-09 & 3,36E-09 \\ 5,07E-09 & 3,36E-08 & 5,66E-09 \\ 3,36E-09 & 5,66E-09 & 1,06E-08 \end{bmatrix} (m) \quad (26)$$

Devido a sua grande dimensão, a matriz de covariância $\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_0^2 A(A'PA)^{-1} A'$, referente à estimação da qualidade das observações (L_a), não será apresentada nesse trabalho.

Observando a matriz de covariância Σ_x verificou-se, na sua diagonal, uma baixa variância, e, fora da diagonal, uma covariância quase nula. Isso implica que a correlação entre as altitudes praticamente não existe.

Analisando os dados obtidos com a metodologia proposta e os dados adquiridos a partir da metodologia utilizada por SILVA (2002a) verificou-se que

houve uma discrepância entre eles. A Tabela 4 mostra os valores das altitudes ajustadas por ambos os métodos e essa discrepância. Pôde ser verificado, nessa tabela, que quanto mais próximos do valor da altitude do marco injuncionado (ETA = 698,410) estiver a altitude do marco estudado, menor será a discrepância entre os dois métodos. Contudo não se pode afirmar a ocorrência de tal fenômeno com apenas os estudos realizados nesse trabalho, necessário se faz realizar novos experimentos com um número maior de parâmetros (altitudes).

Tabela 4 - Discrepâncias entre os resultados obtidos no trabalho e os apresentados por (SILVA, 2002a)

Altitudes	Trabalho	SILVA(2002a)	Discrepância
H ₁ =	702,091	701,988	0,103
H ₂ =	712,981	712,798	0,184
H ₃ =	661,098	660,870	0,228

O fato do método utilizado por SILVA (2002a) ajustar as diferenças de nível e não os ângulos zenitais, impossibilita uma comparação entre as matrizes de covariância das observações. Todavia, as matrizes de covariâncias dos parâmetros apresentaram comportamento diferente. A matriz de covariância Σ_x , advinda do método proposto por SILVA (2002a), está representada a seguir:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} 0,0645 & 0,0322 & 0,0322 \\ 0,0322 & 0,0645 & 0,0322 \\ 0,0322 & 0,0322 & 0,0645 \end{bmatrix} (m) \quad (27)$$

Na matriz Σ_x (49), tanto a covariância como a variância, não apresentaram valores desprezíveis (nulos ou quase nulos), como ocorrido no outro método. Observou-se ainda que ocorreu uma uniformidade desses valores, isto é, a variância nas três altitudes (H_1 , H_2 e H_3) foi constante, com valor igual a 0,0645. A covariância, entretanto, apresentou valor constante igual a 0,0322.

Uma representação gráfica da comparação com os resultados dos dois métodos está na Figura 6. A representação gráfica do erro relativo entre esses dois métodos está na Figura 7.

Figura 6 - Comparação gráfica entre os resultados obtidos

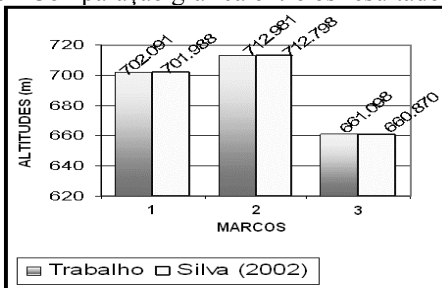
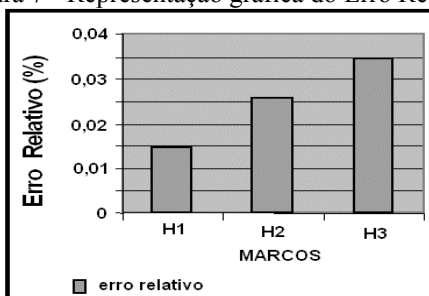


Figura 7 - Representação gráfica do Erro Relativo



De acordo com os valores apresentados na Figura 7 conclui-se que não houve uma relação direta do erro relativo, entre os dois métodos, com a magnitude das distâncias horizontais do marco injuncionado aos demais. Isto é, na altitude do marco ARQ (H3) ocorreu o maior erro relativo, contudo, esse marco possui a menor distância (384,693) do marco ETA.

5. CONCLUSÃO

Demonstrou-se que o procedimento utilizado nesse trabalho para ajustar altitudes usando ângulos zenitais como observações foi satisfatório, uma vez que todas as condições aplicadas pelas equações foram atendidas após o ajustamento das observações e parâmetros.

O método proposto ainda apresenta a vantagem, sobre aquele utilizado por SILVA (2002a), de ajustar as verdadeiras observações (ângulos zenitais). Todavia fazendo uma comparação de resultados entre os dois métodos, percebeu-se que houve uma discrepância (ver Tabela 4). Isso pode ser explicado pela forma de uso das observações (ângulos) no método utilizado por SILVA (2002a), isto é, nesse método, as diferenças de nível originadas a partir dos ângulos zenitais (verdadeiras observações) são definidas como observações.

O processo de escolha do modelo matemático foi uma das dificuldades encontradas na elaboração desse trabalho, porque a cada modelo escolhido era preciso fazer um teste longo, ou seja, era preciso aplicar todos os passos que foram seguidos para realizar o ajustamento, e analisar os resultados.

A demonstração estatística da discrepância entre o resultado obtido nesse trabalho e apresentado por SILVA (2002a), não foi aqui apresentada, ficando como sugestão para novos trabalhos. A consideração de distâncias inclinadas e/ou horizontais e as alturas das bases e instrumentos, como observações, é uma outra sugestão para futuros trabalhos. Uma outra sugestão é a realização desta mesma metodologia numa poligonal que exija os cálculos dos erros: efeito da refração e erro de esfericidade.

6. AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Federal de Viçosa o ensino e o empréstimo dos instrumentos utilizados;
à Universidade Federal do Paraná o empréstimo dos microcomputadores utilizados na revisão final;
ao professor da UFV Antônio Simões a confiança e orientação;
ao professor da UFV Dalton Domingues o apoio na realização deste trabalho;
ao professor da UFPR Quintino Dalmolin o incentivo e apoio na revisão.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DALMOLIN, Q. *Ajustamento por Mínimos Quadrados*. 2ª ed. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, 175p.
- GEMAEL, C. *Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas*. Universidade Federal do Paraná: 1ª edição, Paraná, 1994, 220p.
- LOCH, C.; CORDINI, J. *Topografia Contemporânea: Planimetria*. Editora da UFSC, Universidade Federal de Santa Catarina: Florianópolis, 2000, 321p.
- MAIA, T. C. B. Comparação Entre os Nivelamentos Trigonométrico e GPS com o Nivelamento Geométrico de Acordo com a NBR 13,133, *NUPENGE – I Jornada Científica da Engenharia*, Universidade Católica de Goiás, Departamento de Engenharia, 1999, Disponível em: <http://www.ucg.br / Institutos / nucleos / nupenge / pdf / Tule_Cesar_Barcelos_Maia.pdf>, Acesso: 14 abr, 2004.
- QUINTAS, A. T. Manual de Elaboração de Referências Bibliográficas (Norma ABNT 6023/2000) e Citações (Norma ABNT 10520/92), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Agronomia, Porto Alegre, 2001, Disponível em: <<http://www.sr.unijui.tc.br / ambienteinteiro / Manual.pdf>>, Acesso: 11 jun, 2004.
- SILVA, A. S. Ajustamento Pelos Mínimos Quadrados em Ciências Geodésicas, *postila da Disciplina Ajustamento de Observações do Curso de Engenharia de Agrimensura*, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2002(a), 87p.

SILVA, A. S. Geodésia Geométrica, *Apostila da Disciplina Geodésia Geométrica, do Curso de Engenharia de Agrimensura*, Universidade Federal de Viçosa, 2002(b), 115p.

(Recebido em fevereiro de 2005. Aceito em fevereiro de 2006)